Александр А. Локшин

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Учебное пособие

Третье издание,
исправленное и дополненное

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2023

УДК 511.1(072)
ББК 22.130я7
Л73

https://elibrary.ru/vhhtet

Рецензент:
Е.А. Иванова – канд. физ.-мат. наук, доцент
(МПГУ, кафедра математики и информатики в начальной школе)

Локшин, Александр Александрович.

Л73 **Арифметические задачи на чашечных весах :** учебное пособие / А.А. Локшин. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : МАКС Пресс, 2023. – 76 с.: ил.

ISBN 978-5-317-06987-2
https://doi.org/10.29003/m3440.978-5-317-06987-2

Пособие в основном состоит из арифметических задач, сформулированных в виде элементарных физических опытов с чашечными весами. Адресовано школьным учителям, студентам педвузов и родителям школьников.

Ключевые слова: законы арифметики, равноплечие весы, неравноплечие весы, закон Архимеда, подвесной блок как средство создания «отрицательного веса».

УДК 511.1(072)
ББК 22.130я7

ISBN 978-5-317-06987-2

© А.А. Локшин, 2023, с изменениями
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
§1. Задачи на равноплечих весах 6
§2. Задачи на неравноплечих весах 11
§3. Разные задачи 15
§4. Поиск фальшивой монеты на неравноплечих весах 27
§5. Взвешивание произвольного груза на неравноплечих весах и «двоичная система гирь» 30
§6. Неправильные весы и среднее геометрическое неправильных значений веса 34
§7. «Двоичные» чашечные весы и их преимущество перед обычными 39
§8. Троичная система гирь на равноплечих весах. Сравнение с двоичной системой гирь и «двоичными» весами 49
§9. Квадратные уравнения на супер-чашечных весах 52
§10. «Двоичные» супер-весы и троичная система счисления 54
§11. Системы уравнений на чашечных весах 58
§12. Игра «супер-весы» (версия игры «камешки») 60
Добавление 1. Кое-что о двоичной системе 64
Добавление 2. «Перенесение с противоположным знаком» гири на другую чашу равноплечих весов 68
Добавление 3. К вопросу об определении отношения длин плеч неравноплечих весов 70
Добавление 4. Лаборатория чашечных весов. Возможные типы задач 71
Ответы 74
Литература 75

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта маленькая книжка представляет собой продолжение пособия «Арифметика на чашечных весах» [1], посвященного иллюстрации (или, если угодно, экспериментальному подтверждению) основных арифметических законов. Использование блоков и разноплечих чашечных весов позволило сделать изложение наглядным и компактным.

Настоящее пособие состоит исключительно из арифметических задач, сформулированных в виде элементарных физических опытов с чашечными весами. Часть задач была ранее опубликована (с решениями) в [2].

Фактически, этой книжкой можно пользоваться независимо от [1]. При этом от читателя требуется знать (или интуитивно понимать) два элементарных физических факта:

1. ***«Закон рычага».*** Этот закон, открытый Архимедом, гласит: *Пусть имеется рычаг, плечи которого имеют соответственно длины* L_1 *и* L_2*. Для равновесия этого рычага необходимо и достаточно, чтобы силы* F_1 *и* F_2*, приложенные к соответствующим плечам, были направлены в одну сторону и удовлетворяли условию:* $F_1L_1 = F_2L_2$.

2. «Закон действия блока». *Неподвижный груз, перекинутый через блок, тянет плечо рычага вверх с силой, равной по величине своему весу.*

Всюду ниже мы будем для простоты считать рычаг и чаши весов невесомыми; кроме того, будем считать невесомой нить, перекинутую через блок.

Что касается систем единиц длины и веса, используемых ниже в задачах, то они могут быть взяты любыми, и их обозначения всюду опускаются. Таким образом, мы будем оперировать ниже с числовыми значениями соответствующих физических величин (длины и веса). Если угодно, можно считать, что вес всех грузов измеряется в килограммах, а длины плеч рычагов – в дециметрах. Книжка адресована школьным учителям, студентам педвузов и родителям школьников. В третьем издании существенно расширен параграф 6 «о среднем геометрическом на чашечных весах», добавлены параграфы 7–12, в которых обсуждаются достоинства «двоичных» чашечных весов, а именно, весов, у которых длины плеч относятся как 1:2, а также вводится понятие *p*-ичных чашечных супер-весов, процедура взвешивания на которых органично связана с представлением натуральных чисел в не-десятичных системах счисления.

Автор признателен Н.В. Десятсковой и И.В. Рублеву за полезные обсуждения.

Автор
Москва, 30.04.2023

§1. Задачи на равноплечих весах

Задача 1. *Даны равноплечие весы и система гирь, расположенных на чашах этих весов (см. рис. 1). Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии.*

Задача 2. *Даны равноплечие весы и система гирь, расположенных на чашах этих весов (см. рис. 2). Расставить такие числовые значения веса на гирях, чтобы правая чаша весов опустилась вниз.*

Рис. 1

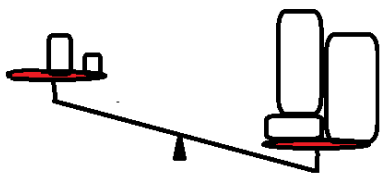


Рис. 2

Задача 3. *Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии (см. рис. 3).*

Задача 4. *Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в* равновесии *(см. рис. 4).*

Замечание. Для весов, находящихся в равновесии вес любого груза, перекинутого через блок, не может превышать веса связанного с ним груза, стоящего на чаше весов.

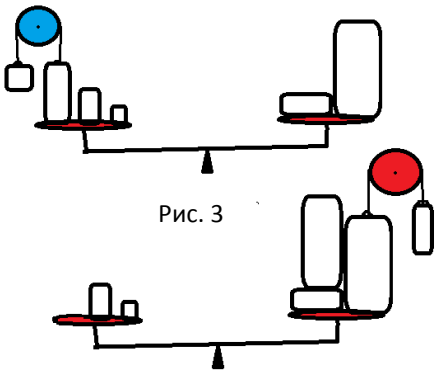


Рис. 3

Рис. 4

Задача 5. *Определить численное значение x веса гири, перекинутой через блок, расположенный над левой чашей весов, находящихся в равновесии (см. рис. 5).*

Задача 6. *Определить численное значение x веса гири, расположенной на правой чаше весов, находящихся в равновесии (см. рис. 6).*

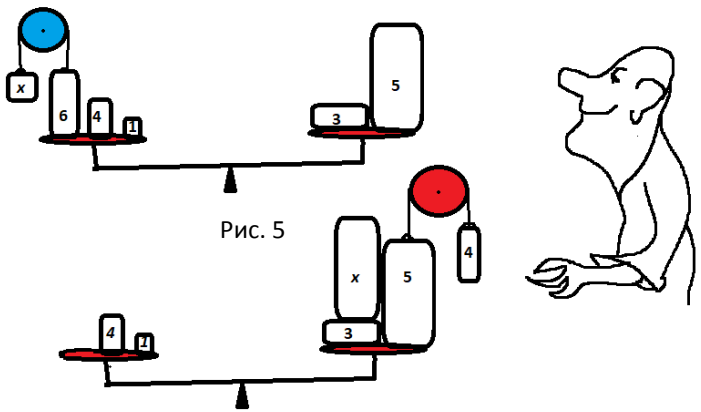


Рис. 5

Рис. 6

Задача 7. *Определить x из условия равновесия равноплечих весов на рис. 7.*

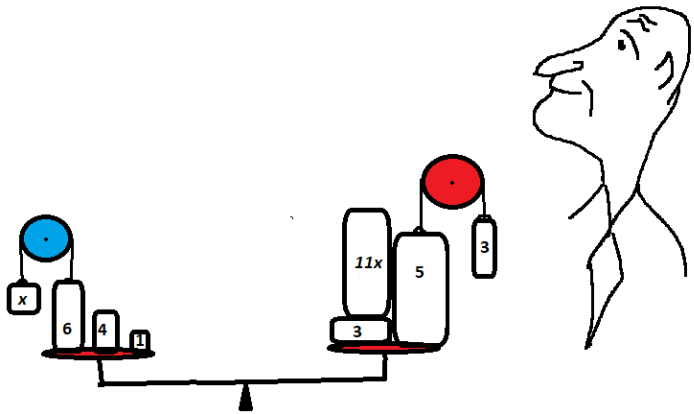


Рис. 7

Задача 8. *Определить x из условия равновесия равноплечих весов на рис. 8.*

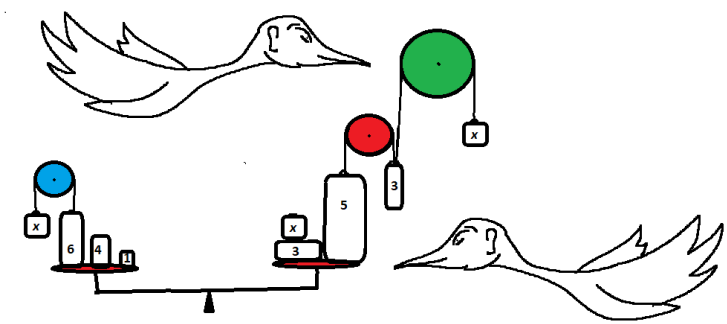


Рис. 8

Задача 9. *Возможно ли при некотором x равновесие равноплечих весов, изображенных на рис. 9?*

Рис. 9

§2. Задачи на неравноплечих весах

Задача 10. *Правое плечо чашечных весов вдвое длиннее левого; см. рис. 10. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

Задача 11. *Правое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее левого; см. рис. 11. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

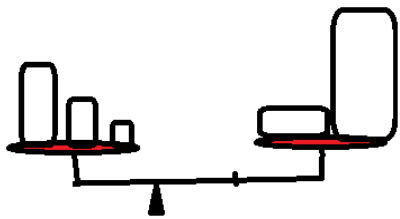


Рис. 10

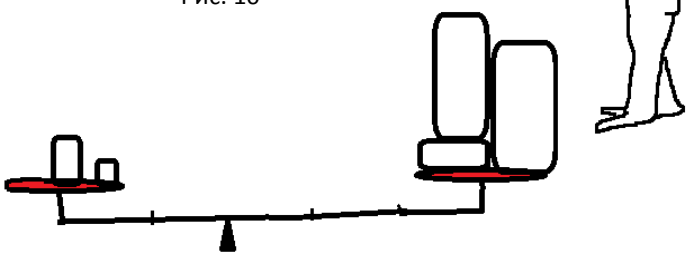


Рис. 11

Задача 12. *Правое плечо чашечных весов вдвое длиннее левого; см. рис. 12. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

Задача 13. *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 13. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

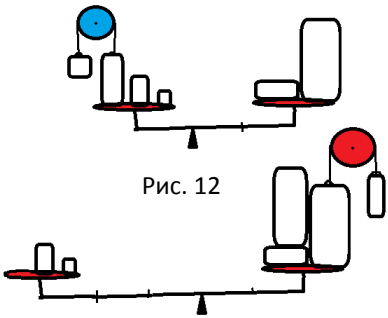


Рис. 12

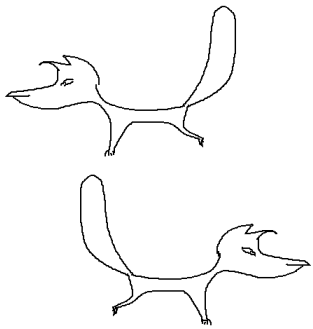


Рис. 13

Задача 14. *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 14. Найти численное значение x веса груза, перекинутого через блок. (Весы находятся в равновесии.)*

Задача 15. *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 15. Найти численное значение x веса груза на правой чаше, при условии, что весы находятся в равновесии.*

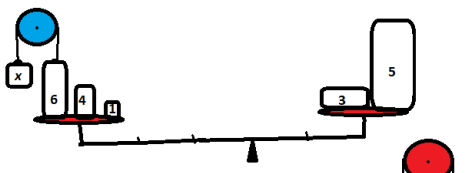


Рис. 14

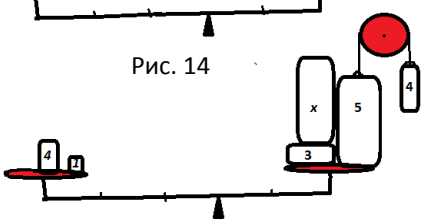
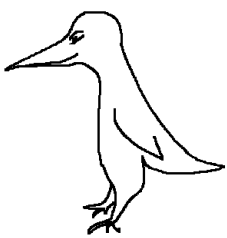


Рис. 15



Задача 16. *Левое плечо находящихся в равновесии чашечных весов в полтора раза короче правого; см. рис. 16. Найти численное значение x.*

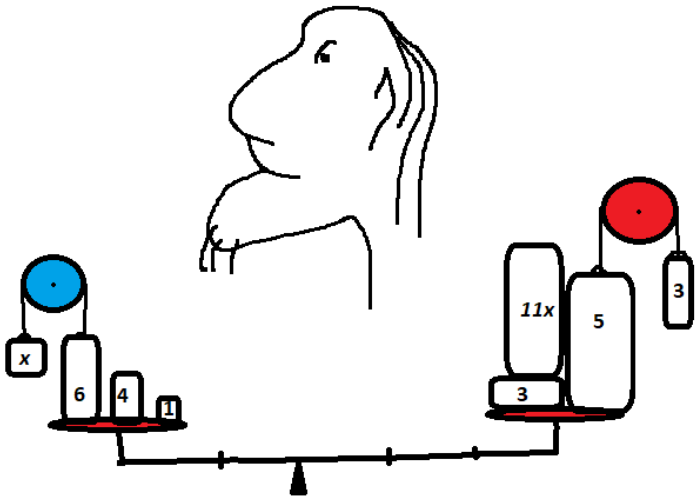


Рис. 16

§3. Разные задачи

Задача 17. *Найти численное значение x, обеспечивающее равновесие чашечных весов на рис. 17.*

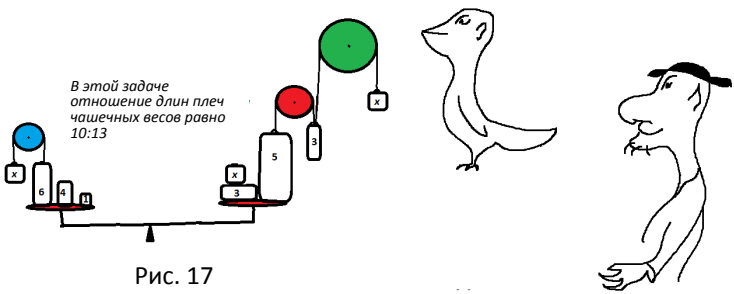


Рис. 17

Задача 18. *Возможно ли при некотором x равновесие чашечных весов, изображенных на рис. 18?*

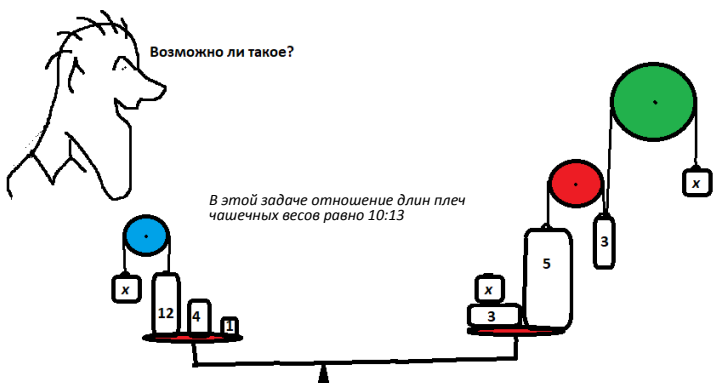


Рис. 18

Задача 19. *Требуется расположить грузы на равноплечих чашечных весах таким образом, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 19.*

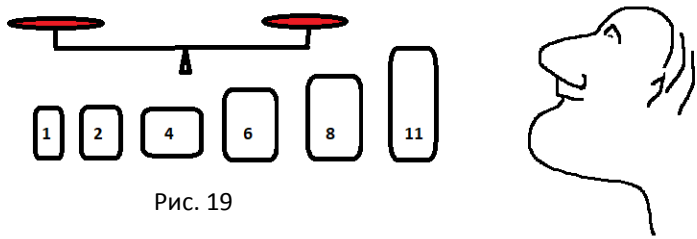


Рис. 19

Задача 20. *Требуется расположить грузы на равноплечих чашечных весах таким образом, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 20.*

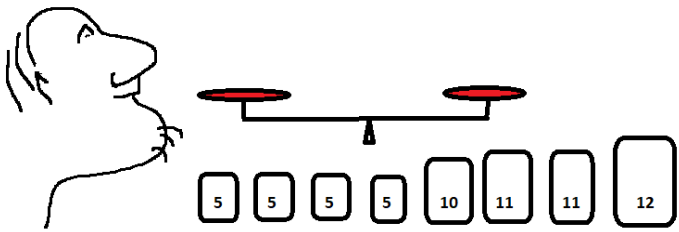


Рис. 20

Указание. Заметим, что веса всех гирь, кроме гирь с весами 11; 11; 12, делятся на 5. Для того, чтобы весы после расстановки всех гирь оставались в равновесии, необходимо, чтобы остатки от деления на 5 сумм весов гирь на каждой из чаш были равны. Это возможно лишь в том случае, если обе гири с весами 11; 11 и гиря с весом 12 будут располагаться на разных чашах. Дальнейшее очевидно.

Задача 21. *Снова равноплечие весы, и снова требуется расположить грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 21.*

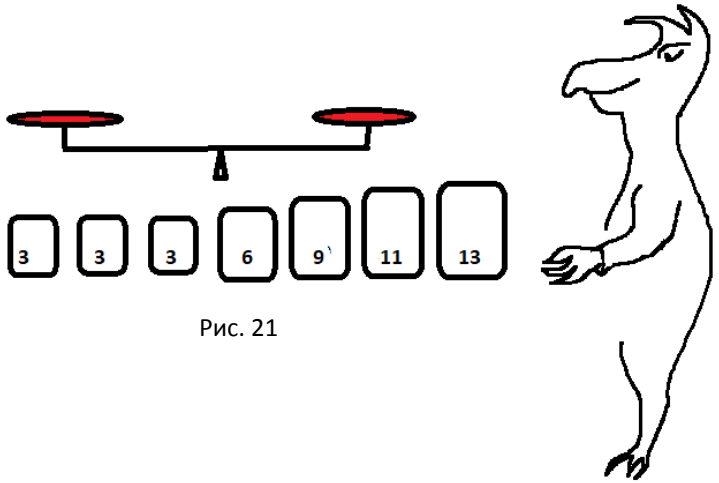


Рис. 21

Задача 22*. *Правое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 22.*

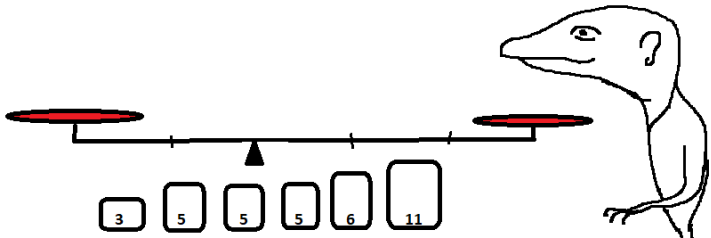


Рис. 22

Задача 23. *Правое плечо чашечных весов в три раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 23.*

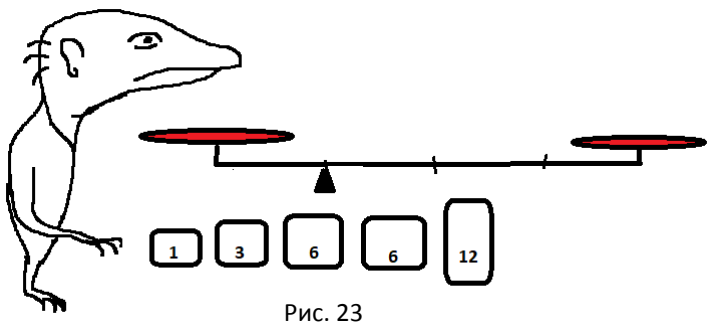


Рис. 23

Задача 24. *Правое плечо чашечных весов в два раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 24.*

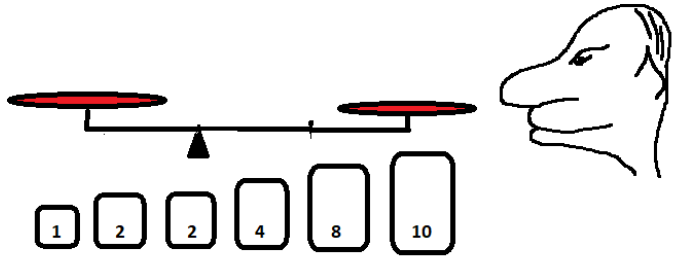


Рис. 24

Задача 25. *Длины плеч чашечных весов относятся, как 3:7. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 25.*

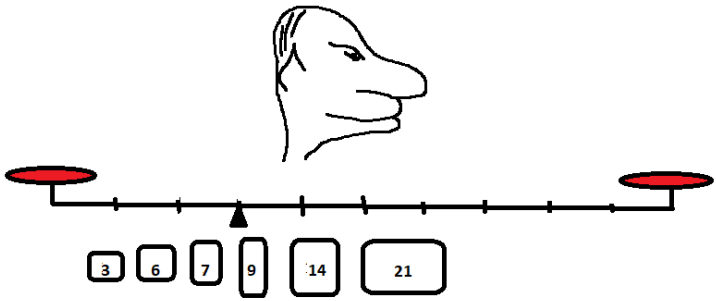


Рис. 25

Задача 26. *Длины плеч чашечных весов относятся, как 3:7. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 26.*

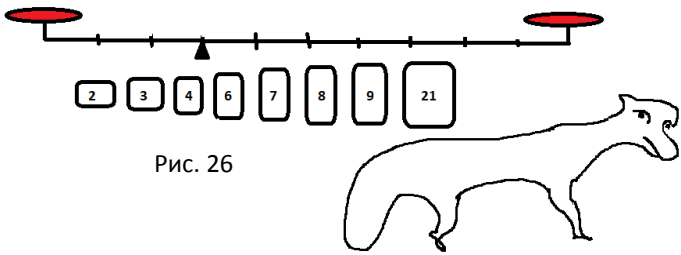


Рис. 26

Задача 27. *Длины плеч чашечных весов относятся, как 2:3. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 27.*

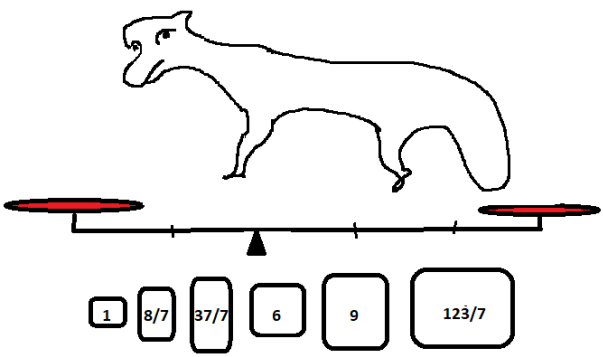


Рис. 27

Указание. Для равновесия рассматриваемых чашечных весов необходимо, чтобы суммы весов поставленных гирь, умноженные на длины соответствующих плеч, имели одинаковые дробные части для обеих чаш. Отсюда нетрудно вывести, что все гири дробного веса из имеющегося набора должны находиться на одной и той же чаше. Дальнейшее очевидно.

Задача 27а (см. [2]). *Даны уравновешенные, но неправильные чашечные весы (длина левого плеча равна 7 единицам, а длина правого плеча равна 9 единицам) и набор гирь с весами:*

9; 18; 19; 27; 33; 46; 100; 100.

Требуется так расставить все эти гири на обеих чашах весов, чтобы весы оставались в равновесии.

Решение. Прежде всего, перепишем еще раз список числовых значений весов всех гирь, указав в скобках величины остатков при делении на 9:

9 (0); 18 (0); 19 (1); 27 (0); 33 (6); 46 (1);

100 (1); 100 (1). (6')

Итак, *пять* из восьми числовых значений весов гирь имеют ненулевые остатки при делении на 9. Все пять соответствующих гирь поставить на правую чашу, очевидно, невозможно (правая чаша перетянет левую). Следовательно, некоторые из упомянутых пяти

гирь придется поставить на левую чашу, но при этом сумма соответствующих остатков должна делиться на 9. Ясно, что на левую чашу придется поставить четыре гири из упомянутых пяти. Короткий перебор вариантов приводит к ответу: на левую чашу следует поставить гири с весами 19; 33: 46: 100, а на правую чашу – все остальные гири.

Замечание. Составлять подобные задачи (имеющие ключ к быстрому решению) легко, а их решение может оказаться полезным для установления связей между математикой и физикой.

Вот как была составлена задача 27а. Пусть даны уравновешенные, но неравноплечие чашечные весы (длина левого плеча 7 единиц, длина правого плеча 9 единиц). Будем составлять набор гирь с такими целочисленными весами, что, поставив гири на обе чаши, мы оставим наши чашечные весы в равновесии.

Из этого условия ясно, что полный набор гирь, который нам нужен, должен состоять из двух непересекающихся групп гирь – «левой» и «правой». При этом суммарный вес «левой» группы должен нацело делиться на 9, а суммарный вес «правой» группы должен нацело делиться на 7. «Левую» группу гирь составляем с таким расчетом, чтобы вес каждой отдельно взятой гири имел ненулевой остаток при делении на 9.

Например, возьмем в качестве значений весов гирь из «левой» группы такие числа:

19 (1), 33 (6), 46 (1), 100 (1) (*)

(в скобках указаны значения остатков при делении соответствующих чисел на 9).

Суммируя веса гирь из «левой» группы, т.е. числа из набора (*), стоящие вне скобок, и умножая результат на 7, получаем численное значение момента силы, направленного против часовой стрелки:

M = 7(19 + 33 + 46 + 100) = 1386.

(Этот момент силы возникает от воздействия силы тяжести «левой» группы гирь на левое плечо наших чашечных весов.)

Таким же численным значением должен обладать момент силы, направленный по часовой стрелке, возникающий от воздействия силы тяжести «правой» группы гирь на правое плечо наших чашечных весов. Сумма весов «правой» группы гирь, очевидно, должна быть равна частному

M : 9 = 1386 : 9 = 154.

Теперь найденную сумму весов «правых» гирь можно «набирать» из отдельных слагаемых более-менее произвольным образом. Однако для того, чтобы у нашей задачи образовался «ключ» к быстрому решению, представим число 154 в виде суммы таких слага-

емых, из которых все, кроме одного, будут делиться на 9.

Например, положим:

154 = 100 + 9 + 18 + 27.

Итак, численные значения весов «правых» гирь – это слагаемые в правой части предыдущего равенства.

В результате получаем следующий объединенный набор гирь («левых» и «правых»):

9; 18; 19; 27; 33; 46; 100; 100. (**)

Составление задачи 27а закончено.

Задача 28. *Сколько должна весить каждая из трех гирь, чтобы на изображенных на рис. 28 неравноплечих чашечных весах (у которых отношение длин плеч равно 1:3) можно было уравновесить каждый из шести грузов, численные значения весов которых соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

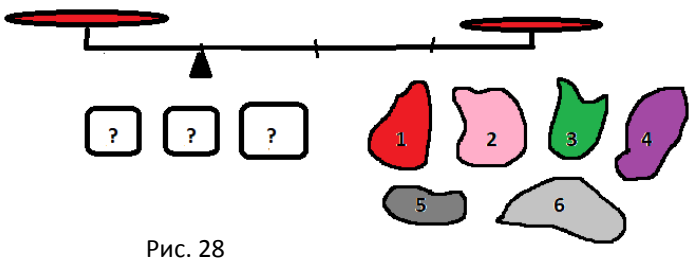


Рис. 28

Задача 29. *Сколько должна весить каждая из трех гирь, чтобы на изображенных на рис. 29 неравноплечих чашечных весах (у которых отношение длин плеч равно 1:2) можно было уравновесить каждый из шести грузов, численные значения весов которых соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

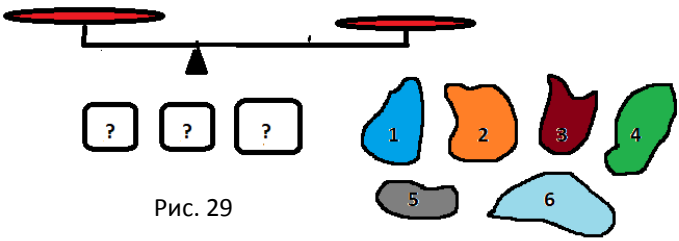


Рис. 29

Задача 30. *На рис. 30 изображены неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 2:3. Возможно ли точно отвесить на этих весах 1/6 кг муки с помощью двух гирь весом соответственно в 1 кг и 2 кг?*

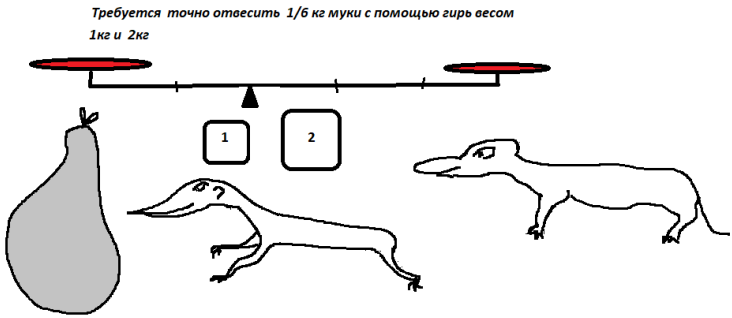


Рис. 30

Указание. Задача решается в два действия:

1) $2x = 3\times1$; $x = 3/2$.

2) $3(3/2 - y) = 2\times2$; $y = 1/6$.

§4. Поиск фальшивой монеты на неравноплечих весах

Задача 31. *Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 1:3 (см. рис. 31). Далее, имеются 9 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Требуется за три взвешивания на упомянутых весах гарантированно определить фальшивую монету.*

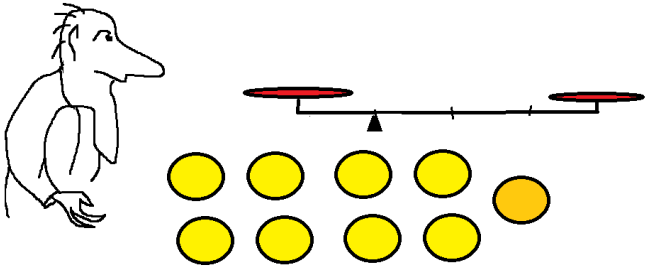


Рис. 31

Указание. При первом взвешивании на левую чашу можно положить шесть монет, а на правую – две. Впрочем, можно начать действовать и иначе: при первом взвешивании положить на левую чашу три монеты, а на правую – одну.

Задача 32. *Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 2:5 (см. рис. 32). Далее, имеются 9 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Требуется за три взвешивания на упомянутых весах с гарантией определить фальшивую монету.*

Указание. При первом взвешивании на левую чашу следует положить пять монет, а на правую – две.

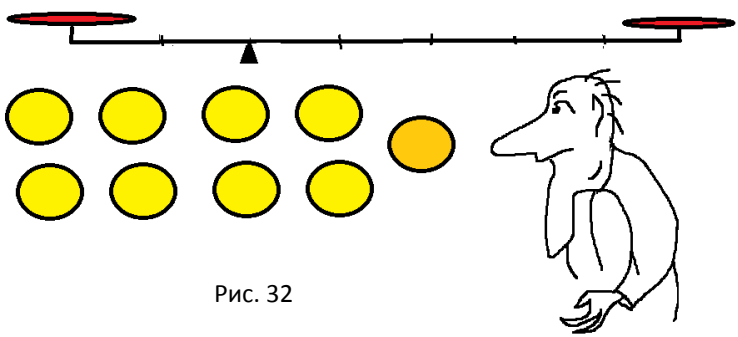


Рис. 32

Задача 33. *Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно m:n. Далее, имеется m+n+1 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих.*

А) За какое наименьшее количество взвешиваний можно с гарантией определить фальшивую монету?

Б) Тот же вопрос, если имеется всего m+n+k монет.

В) Тот же вопрос, если известно только, то фальшивая монета другого веса, чем настоящие (но неизвестно – легче она или тяжелее).

§5. Взвешивание произвольного груза на неравноплечих весах и «двоичная система гирь»

В этом параграфе мы разовьем известную идею (содержащуюся, например, в [4]) о том, как отвесить на неравноплечих не уравновешенных чашечных весах ровно 1 кг сыпучего груза, если имеется правильная гиря весом в 1 кг. Нетривиальная идея, лежащая в основе решения этой задачи, заключается в том, что вначале следует уравновесить сыпучим грузом правильную гирю, а затем *гирю снять* и добиться равновесия весов с помощью второй порции сыпучего груза, помещенной на место убранной гири. Эта вторая порция и будет весить ровно 1 кг. (См. похожую задачу также в [1].)

Здесь мы несколько изменим вышеописанный подход, сделав его применимым не только к случаю, когда нужно отвесить на неправильных весах заранее заданное количество вещества, но и к более общему случаю, когда нужно определить вес произвольного груза.

Вначале введем определение. Назовем систему гирь с весами

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, 128 г, … (*)

двоичной системой гирь.

Итак, наша задача формулируется несколько по-другому, чем в [4].

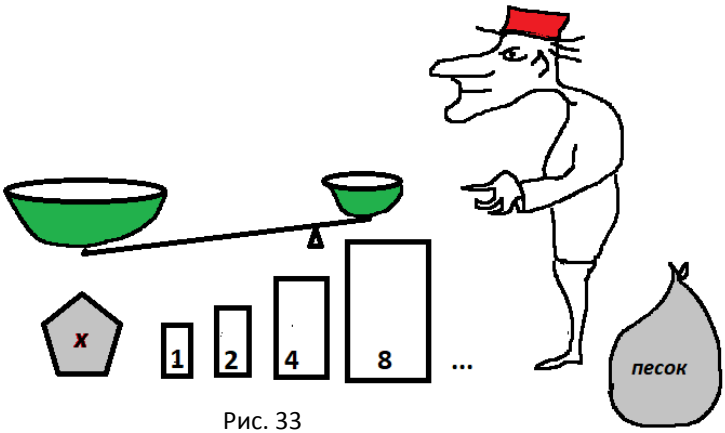


Рис. 33

Задача 34. *Имеются неравноплечие, не уравновешенные чашечные весы, двоичная система гирь (*), мешок с песком и произвольный твердый груз X, который нужно взвесить на имеющихся весах с точностью до ½ грамма. Требуется описать алгоритм такого взвешивания.*

Решение. Для определенности, считаем, что вес груза X не превосходит 127 г, т.е. суммарного веса гирь с весами

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г.

Алгоритм состоит в следующем. Вначале уравновешиваем на имеющихся весах груз X при помощи

песка. (Груз *X* кладем, например, на левую чашу, а песок – сыплем на правую.) Затем снимаем груз *X* с левой чаши и кладем на нее гирю весом 64 г. Если весы оказываются в равновесии, задача решена. (Очевидно, что вес груза *X* будет в точности равен 64 г.) Если же левая чаша перевешивает, снимаем поставленную гирю с весов (*в дальнейшем ее уже не используем*) и заменяем ее следующей по весу; так действуем до тех пор, пока это возможно. Если же перевешивает правая чаша, то добавляем к поставленной гире весом в 64 г (*которую в дальнейшем уже не трогаем*) следующую по весу, т.е. гирю весом в 32 г. Затем процедура повторяется, снова рассматриваем три случая; в первом случае, когда весы оказываются в равновесии, задача оказывается решенной (вес груза *X* в этом случае будет равен 64 г + 32 г = 96 г). Если левая чаша перевешивает, то снимаем гирю весом в 32 г и заменяем следующей по весу; так действуем, пока это возможно. Если же перевешивает правая чаша, то добавляем к ранее поставленным гирям следующую по весу, и процедура повторяется.

Нетрудно понять, что процедура закончится, когда исчерпаются все использованные гири.

В итоге вес груза *X* будет приблизительно равен сумме весов всех гирь, оказавшихся на левой чаше в конце процедуры. Истинный вес груза *X* может от-

личаться в ту или иную сторону от этой суммы на 1 г. Точность в ½ грамма можно достичь следующим способом. Если в конце процедуры левая чаша перевешивает, а сумма весов всех находящихся на ней гирь равна n граммам, то вес груза X следует положить равным $(n - ½)$ граммам, если же в итоге перевешивает правая чаша, то вес груза X следует положить равным $(n + ½)$ граммам.

Замечание. Читатель может заинтересоваться вопросом: всегда ли упомянутый удобный способ нахождения веса произвольного груза X срабатывает, нет ли здесь исключений. Законность приведенного способа доказывается методом математической индукции (см. Добавление).

§6. Неправильные весы и среднее геометрическое неправильных значений веса

Допустим, что в нашем распоряжении имеются неправильные, но уравновешенные весы, причем соотношение длин плеч этих весов неизвестно и не может быть непосредственно измерено. (Например, коромысло весов может быть подвешено к потолку.) Будем, кроме того, считать, что мы располагаем *расширенной двоичной системой гирь*, а именно – всеми гирями с весами

…1/8г, ¼ г, ½ г, 1г, 2г, 4г, 8г, 16г, 32г, 64г, 128г, …

Приведем еще один способ нахождения веса P(X) произвольного груза X на имеющихся неправильных весах.

Прежде всего, обозначим длину левого и правого плеча наших весов через L_1 и L_2 соответственно. Положим груз X на правую чашу весов и уравновесим его с помощью набора гирь с общим весом P_1 . В результате получим по закону рычага:

$$P_1L_1 = P(X)L_2. \qquad (*)$$

Уберем теперь с весов все, что было на них положено. Затем поместим груз X на левую чашу и уравно-

весим его с помощью нового набора имеющихся гирь с общим весом P_2. Получим:

$$P_2L_2 = P(X)L_1. \qquad (**)$$

Поделив равенство (**) на (*), получим:

$$P_2L_2/\ P_1L_1 = L_1/L_2,$$

т.е.

$$P_2/\ P_1 = (L_1/L_2)^2,$$

откуда имеем:

$$L_1/L_2 = (P_2/\ P_1)^{1/2}.$$

Подставляя теперь последнее соотношение в (*), получаем искомое выражение для $P(X)$:

$$P(X) = P_1(P_2/\ P_1)^{1/2} = (P_1P_2)^{1/2}. \qquad (***)$$

Замечание. На школьных занятиях этот результат можно использовать, например, следующим образом. Сначала при помощи взвешиваний получить значения P_1 и P_2 , затем перемножить эти значения на калькуляторе и извлечь из произведения квадратный корень. После чего взвесить груз X на обычных весах со стрелкой и сравнить результаты. Не исключено, что такой опыт может содействовать взаимному проникновению школьной физики и математики.

Замечание. Формула (***) позволяет без труда проверить при помощи чашечных весов справедли-

вость неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$(P_1P_2)^{1/2} \leq (P_1 + P_2)/2. \qquad (****)$$

(Неравенство (****) будет на самом деле строгим, т.к. $P_1 \neq P_2$, поскольку плечи L_1 и L_2 не равны.)

Для проверки неравенства (****) необходимо иметь два идентичных набора «двоичных» гирь, где каждая гиря была бы составлена из двух одинаковых половинок. Кроме того, нужны неравноплечие уравновешенные чашечные весы, а также обычные чашечные весы (равноплечие и уравновешенные). Проверка неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим сведется к установлению того факта, что на правильных чашечных весах груз *X* поднимется вверх при попытке уравновесить его грузом с весом $(P_1 + P_2)/2$.

Задача 35. *Имеются неравноплечие уравновешенные чашечные весы. Груз X весом 16 кг был сначала положен на левую чашу весов и уравновешен целочисленным грузом P_1, затем груз X был положен на правую чашу весов и уравновешен целочисленным грузом P_2. Чему равно отношение длин плеч рассматриваемых неравноплечих весов?*

Задача 36. *Имеются неравноплечие уравновешенные чашечные весы. Груз X был сначала положен на*

левую чашу весов и уравновешен гирей P_1 (причем численное значение веса, обозначенное на этой гире, на 10% меньше ее истинного веса). Затем груз X был положен на правую чашу весов и уравновешен гирей P_2 (причем численное значение веса, обозначенное на этой гире, на 10% больше ее истинного веса).С какой погрешностью был установлен вес груза X?

Рассмотренная выше ситуация может быть обобщена на случай, когда заранее не известное значение веса груза может быть представлено в виде среднего геометрического не двух, а нескольких «неправильных» числовых значений, полученных на неравноплечих весах.

А именно, пусть, например, в нашем распоряжении имеются три экземпляра чашечных весов, у которых отношение длины левого плеча к длине правого соответственно равны L_1/L_2, L_2/L_3, L_3/L_1 . *Подчеркнем, что числовые значения самих этих отношений длин мы считаем неизвестными.* Последовательно уравновешивая с помощью гирь груз *X* на этих трех экземплярах чашечных весов (груз *X* всегда ставим на левое плечо), получаем:

$$P(X)L_1 = P_2L_2,$$

$$P(X)L_2 = P_3L_3,$$

$$P(X)L_3 = P_1L_1.$$

Перемножая эти три равенства и сокращая на произведение $L_1L_2L_3$, легко получаем искомое выражение для P(X):

$$P(X) = [P_1P_2P_3]^{1/3}.$$

Если каждая использованная гиря сложена из трех идентичных фрагментов, то нетрудно проверить (на обычных равноплечих весах, без каких-либо вычислений) справедливость неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$P(X) =[P_1P_2P_3]^{1/3} \leq [P_1+P_2+P_3]/3.$$

§7. «Двоичные» чашечные весы и их преимущество перед обычными [6]

Рассмотрим *двоичную систему гирь*

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, 128 г, …,

и ее произвольный начальный отрезок:

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, …, 2^n г. (*)

Если заранее известно, что числовое значение веса P(X) интересующего нас целочисленного груза X не превосходит $(2^{n+1} - 1)$ (т.е. суммы числовых значений всех весов этих $(n + 1)$ гирь), то такой груз, очевидно, всегда может быть уравновешен на равноплечих чашечных весах при помощи некоторых гирь из этого набора. (Это следует из того факта, что любое натуральное число единственным образом представимо в виде суммы степеней двойки.) При этом сам груз X имеет смысл помещать на одну чашу весов, а гири – на другую. Возможность поставить некоторые гири на одну чашу вместе с грузом X, безусловно, существует, но никак не расширяет совокупность тех целочисленных грузов, которые можно взвесить на равноплечих весах.

Например, груз X весом в 15 г может быть уравновешен двумя способами, в соответствии с числовыми равенствами:

$P(X) + 1 = 16,$

$P(X) = 8 + 4 + 2 + 1.$

Если в нашем распоряжении имеются неравноплечие (но обязательно уравновешенные!) чашечные весы, то ситуация резко меняется. Наиболее интересен случай, когда одно плечо весов вдвое длиннее другого. Такие чашечные весы мы будем для краткости называть «двоичными». Мы будем считать, что левое плечо имеет длину L, а правое – длину 2L.

Теорема 1. *На «двоичных» весах, располагая набором гирь* (*) *можно уравновесить любой целочисленный груз, вес которого не превосходит* 2^{n+1} *г.*

Доказательство. Итак, положим на короткое плечо (длины L) гирю весом 2 г, а на длинное плечо (длины 2L) – груз *X*. Равновесие будет означать, что справедливо равенство:

$2 \cdot L = P(X) \cdot 2L,$

т.е.

$P(X) = 1.$

Это единственный случай, когда нам приходится класть взвешиваемый груз на длинное плечо. Во всех остальных случаях, имея дело с целочисленными грузами, взвешиваемый груз будем класть на короткое плечо наших «двоичных» весов.

Далее, уравновесим груз X весом 2 г. Равновесию весов соответствует теперь равенство:

$$P(X)\cdot L = 1\cdot 2L,$$

откуда

$$P(X) = 2.$$

Равновесиям грузов весом в 3 г, 4 г, 5 г … будут соответствовать равенства:

$$(P(X) + 1)\cdot L = 2\cdot 2L,$$

$$P(X)L = 2\cdot 2L,$$

$$(P(X) + 1 + 2)\cdot L = 4\cdot 2L,$$

и т.д.

То, что любой целочисленный груз, вес которого не превышает 2^{n+1} г, можно уравновесить на «двоичных» весах с помощью набора гирь (*) будем доказывать по индукции.

База индукции. Пусть $n = 1$. Тогда утверждение теоремы верно (см. выше).

Предположение индукции. Предположим, что при некотором произвольно взятом $n = k$ утверждение теоремы верно.

Шаг индукции. Докажем, что тогда утверждение теоремы будет справедливым и для $n = k + 1$. Прежде всего, заметим, что нас могут интересовать только целочисленные грузы, вес которых строго больше 2^{k+1} г

(поскольку целочисленные грузы меньшего веса могут быть уравновешены на наших «двоичных» весах с помощью имеющейся системы гирь по предположению индукции). При этом мы, в соответствии с условием теоремы, рассматриваем грузы, вес которых не превосходит 2^{k+2} г.

Итак, нас интересует следующий промежуток целочисленных значений веса взвешиваемых грузов:

$$2^{k+1} + 1 \le P(X) \le 2^{k+2}. \qquad (**)$$

Заметим, однако, что любое целое число P из этого промежутка может быть представлено в виде разности:

$$P = 2^{k+2} - M,$$

где M – целое неотрицательное число, не превосходящее $2^{k+1} - 1$. Таким образом, число M может быть либо равным нулю, либо представлять собой сумму нескольких степеней двойки, где все показатели степеней различны и не выше k. Это, в свою очередь, означает, что груз X с числовым значением P(X) из промежутка (**) может быть следующим образом уравновешен на «двоичных» весах системой гирь (*), где $n = k+1$.

Если $P(X) = 2^{k+2}$, то на левую чашу помещаем груз X, а на правую – гирю весом 2^{k+1} г.

Если P(X) < 2^{k+2}, то по-прежнему на левую чашу помещаем груз X, а на правую – гирю весом 2^{k+1} г, но, кроме того, на левую чашу ставим некоторые гири из набора (*), где $n = k$.

Теорема доказана.

Замечание. Итак, «двоичные» чашечные весы (при одинаковом двоичном наборе гирь) позволяют взвесить все те целочисленные грузы, которые могут быть взвешены на обычных равноплечих весах. Однако нетрудно понять, что, оперируя набором гирь (*), на «двоичных» весах можно уравновесить и такие целочисленные грузы, которые на равноплечих весах уравновешены быть не могут. А именно, это грузы со следующими последовательными четными числовыми значениями веса:

$$2^{n+1},\ 2^{n+1}+2,\ 2^{n+1}+4,\ \ldots,\ 2^{n+2}-2. \qquad (***)$$

Очевидно, что если к набору гирь (*) добавить вторую гирю весом 1 г, то на «двоичных» чашечных весах можно будут уравновесить любой целочисленный груз с числовым значением веса от 1 до $2^{n+2}-1$.

Замечание. Но даже этим не исчерпываются преимущества «двоичных» весов перед обычными (равноплечими) чашечными весами. Дело в том, что, располагая системой гирь (*), на «двоичных» весах можно уравновешивать не только целочисленные, но и полуцелые грузы. Например, груз X весом в 3½ г

можно уравновесить на «двоичных» весах, если положить его на правую чашу (опирающуюся на плечо длины 2L), а на левую чашу (опирающуюся на плечо длины L) – гири весом 4г, 2г и 1г.

Замечание. Попробуем сравнить возможности «двоичных» чашечных весов с обычными (равноплечими) при иной системе гирь. Например, рассмотрим более-менее общепринятую «десятичную» систему гирь, напоминающую по своему составу древнеримскую систему счисления:

1 г (пять штук одинаковых гирь), 5 г, 10 г (четыре одинаковые гири), 50 г, 100 г (четыре одинаковые гири), 500г. (****)

Такая система гирь, очевидно, позволяет уравновесить на обычных чашечных весах любой целочисленный груз весом от 1 г до 1000 г.

Попробуем выяснить, какие целочисленные грузы можно уравновесить на «двоичных» чашечных весах при работе с системой гирь (****).

Прежде всего, очевидно, что, пользуясь системой гирь (****), можно уравновесить на чашечных весах любой «четный» целочисленный груз в пределах от 2 г до 2000 г.

Мы, однако, временно оставим этот результат в стороне и ограничимся рассмотрением всех («четных» и «нечетных») целочисленных грузов в пределах от 1 г до 1000 г.

Теорема 2. *Все целочисленные грузы, которые могут быть уравновешены на обычных весах при помощи системы гирь (****), т. е. целочисленные грузы в пределах от 1 г до 1000 г, удается уравновесить и на «двоичных» весах.*

Доказательство. Для определенности считаем, что числовое значение P(X) веса груза X – трехзначное число:

$P(X) = 100a + 10b + c$.

Итак, кладем груз X на левую чашу.

Если a четно, то на правую чашу кладем $a/2$ стограммовых гирь и переходим к рассмотрению разряда десятков.

Если a нечетно, то на левую чашу добавляем к грузу X одну или три стограммовые гири, а на правую чашу кладем, в зависимости от ситуации, пятисотграммовую гирю или несколько (от одной до трех) стограммовых гирь. В результате будем иметь дело с одним из числовых соотношений вида:

$P(X) + 100 + \ldots = 2 \cdot 500 + \ldots,$

$P(X) + 100 + 100 + 100 + \ldots = 2 \cdot 500 + \ldots,$

$P(X) + 100 + \ldots = 2 \cdot (100 + 100 + 100) + \ldots,$

$P(X) + 100 + \ldots = 2 \cdot (100 + 100) + \ldots,$

$P(X) + 100 + \ldots = 2 \cdot 100 + \ldots,$

Аналогичным образом продолжаем действовать в разряде десятков и, затем, в разряде единиц. Теорема доказана.

Пример. Груз X весом в 739 г может быть уравновешен на «двоичных» весах следующим образом:

$(P(X) + 100 + 100 + 100 + 10 + 1)\cdot L = (500 + 10 + 10 + 5)\cdot 2L.$

Вернемся теперь к вопросу о том, какие «нечетные» грузы X с числовыми значениями $P(X)$ из промежутка от 1001 до 1999 можно уравновесить на «двоичных» весах с помощью набора целочисленных гирь (****). Имеем:

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1001$,

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 1 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1003$,

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 1 + 1 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1005$,

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 1 + 1 + 1 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1007$,

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 5)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1009$,

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 5 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1011$,

…

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1017$,

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 10)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1019$,

…

$(P(X) + 1)\cdot L = (500 + 100 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1)\cdot 2L$, откуда $P(X) = 1997$.

Подчеркнем, что в правых частях всех предыдущих соотношений, определяющих нечетные значения P(X) в пределах от 1001 до 1997, слагаемое «1» встречается не более четырех раз, а левые части всех этих соотношений одинаковы.

Итак, при помощи гирь (****) на «двоичных» весах удается уравновесить почти вдвое больше целочисленных грузов, чем на обычных чашечных весах. А именно – любые целочисленные грузы весом от 1 г до 1998 г.

Груз весом 1999 г на «двоичных» весах уравновесить с помощью набора гирь (****) уже не удается.

Задача 37. Уравновесить на «двоичных» чашечных весах груз весом 1559 г, пользуясь гирями из набора (****).

Указание. $1559 = 2\cdot(1560/2) - 1 = 2\cdot(500 + 250 + 30) - 1$.

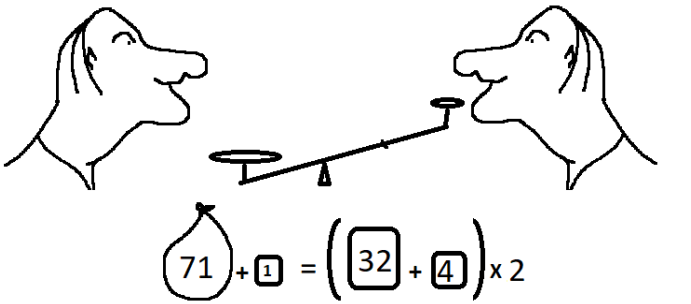


Рис. 34

Задача 38. Придумать алгоритм взвешивания целочисленного груза на «двоичных» чашечных весах с использованием двоичной системы гирь (*).

В заключение заметим следующее. По-видимому, никакие иные неравноплечие весы («троичные», «пятеричные» или еще какие-то) не обладают таким широким охватом грузов, которые удается взвесить при разумной системе гирь.

§8. Троичная система гирь на равноплечих весах. Сравнение с двоичной системой гирь и «двоичными» весами

Может показаться, что при любой системе гирь «двоичные» весы работают эффективнее, чем обычные. Но это не так.

Существует система гирь, замечательно приспособленная к обычным (равноплечим) чашечным весам и совершенно не пригодная для использования на «двоичных» весах.

Это система, в которой числовые значения веса гирь представляют собой последовательные степени тройки:

1 г, 3 г, 9 г, 27 г, 81 г, …, 3^n г, …

Оказывается, что с помощью гирь, принадлежащих начальному отрезку этой системы, т.е. совокупности гирь с весами

1 г, 3 г, 9 г, 27 г, 81 г, …, 3^n г, (*)

можно на равноплечих весах уравновесить любой целочисленный груз, вес которого не превосходит суммы числовых значений весов всех гирь (*). Суммируя геометрическую прогрессию, имеем для этой суммы, которую обозначим S_n:

$S_n = (3^{n+1} - 1)/2$.

Таким образом, отношение количества целочисленных грузов, которые можно уравновесить на равноплечих весах, пользуясь системой гирь (*), к количеству использованных гирь равно дроби

$(3^{n+1} - 1)/2(n + 1)$.

Аналогичное отношение для двоичной системы гирь равно

$(2^{n+1} - 1)/(n + 1)$.

Итак, мы видим, что при одинаковом количестве доступных для использования гирь (равном n +1), троичные гири, если n достаточно велико, позволяют уравновесить на равноплечих весах намного больше целочисленных грузов, чем двоичные. Нетрудно заметить, что в указанном смысле использование троичных гирь на равноплечих весах оказывается при больших n также более экономным, чем использование двоичных гирь на «двоичных» весах.

Замечание. Задача нахождения наименьшего числа гирь, достаточных для того, чтобы уравновесить заданный интервал целочисленных грузов, носит имя французского математика Клода Баше, который опубликовал ее решение в 1612 году. Оказалось, что наилучший результат дает использование троичной системы гирь.

Покажем, как работает троичная система гирь, если нужно, например, уравновесить груз X весом 41 г. Прежде всего, представим число 41 в троичной системе счисления, т.е. разложим по степеням тройки. Имеем:

$$41 = 1\cdot3^3 + 1\cdot3^2 + 1\cdot3 + 2\cdot3^0 =$$
$$= 1\cdot3^3 + 1\cdot3^2 + 1\cdot3 + (3-1)\cdot1 = 1\cdot3^3 + 1\cdot3^2 + 2\cdot3^1 - 1 =$$
$$= 1\cdot3^3 + 1\cdot3^2 + (3-1)\cdot3^1 - 1 = 1\cdot3^3 + 2\cdot3^2 + -3 - 1 =$$
$$= 1\cdot3^3 + (3-1)\cdot3^2 - 3 - 1 =$$
$$= 2\cdot3^3 - 9 - 3 - 1 = (3-1)\cdot3^3 - 9 - 3 - 1 =$$
$$= 81 - 27 - 9 - 3 - 1.$$

Таким образом,

$$41 = 81 - 27 - 9 - 3 - 1.$$

Итак, достаточно поставить на одну чашу весов рассматриваемый груз X и четыре гири весом в 27 г, 9 г, 3 г и 1 г, а на другую чашу – гирю весом 81 г.

Замечание. Сравнивать эффективность использования чашечных весов (в совокупности с соответствующей системой гирь) можно не только по величине дроби, равной отношению диапазона значений веса уравновешиваемых грузов к числу гирь. В качестве иного параметра можно взять отношение диапазона значений веса уравновешиваемых грузов к суммарному весу всего набора используемых гирь. *Нетрудно видеть, что по этому параметру «двоичные» весы вместе с двоичным набором гирь примерно вдвое превосходят результат, достигаемый при помощи любого набора гирь на равноплечих весах.*

§9. Квадратные уравнения на супер-чашечных весах

Назовем *супер-чашечными* весы, у которых на каждом из плеч может быть расположено несколько чаш. Мы ограничимся случаем, изображенным на рис. 35, где имеется единственная чаша на коротком правом плече и две чаши на длинном левом, из которых одна расположена ровно посередине левого плеча.

Будем считать, что отношение длин плеч L_1/ L_2 нам неизвестно.

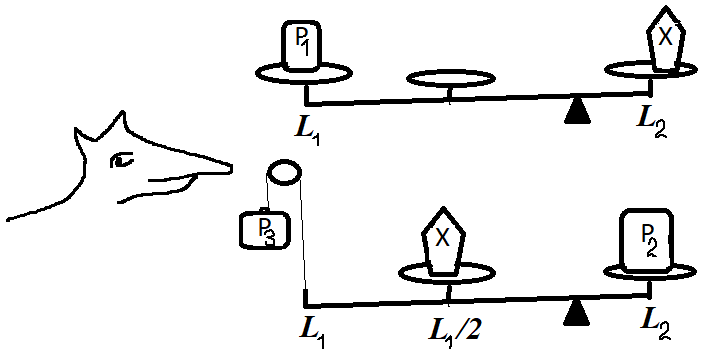


Рис. 35

Уравновесим груз *X* двумя разными способами, изображенными на рис. 35.

Мы предполагаем, что груз *X* настолько тяжел, что, даже поместив его на ту левую чашу, которая распо-

ложена посередине левого плеча, уравновесить его удается лишь с помощью гири, перекинутой через блок и привязанной к концу левого плеча.

В результате получим два соотношения:

$P_1L_1 = Q(X)L_2$,

$Q(X)L_1/2 - P_3L_1 = P_2L_2$,

где Q(X) – неизвестное числовое значение веса груза *X*; P_1, P_2 и P_3 – числовые значения веса соответствующих гирь; L_1 и L_2 – длины плеч супер-чашечных весов. Поделив предыдущие соотношения одно на другое, избавимся от неизвестных значений L_1 и L_2, откуда легко получим квадратное уравнение для $Q = Q(X)$:

$Q^2/2 - P_3Q - P_1P_2 = 0$.

Нетрудно понять, что корни этого уравнения обязательно будут иметь разные знаки; отрицательный корень не имеет физического смысла.

Замечание. Этот результат может представлять определенный интерес, если поставить перед собой цель: обнаружение связи между чисто математической процедурой решения квадратного уравнения и предметными действиями: взвешиванием груза X сначала на чашечных супер-весах, а затем - на обычных весах со стрелкой.

§10. «Двоичные» супер-весы и троичная система счисления

Рассмотрим обычные «двоичные» чашечные весы и превратим их в супер-весы, поместив посередине длинного плеча еще одну (третью) чашу (см. рис. 36).

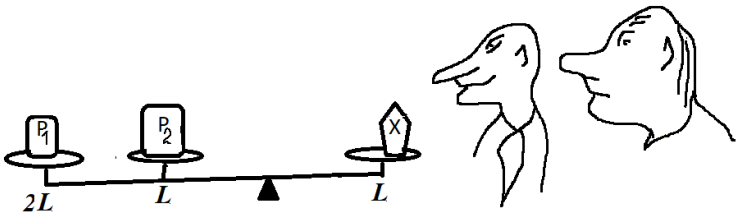


Рис. 36

Нетрудно понять, что такие супер-весы идеально приспособлены для троичного набора гирь. Действительно, разлагая натуральное число по степеням тройки, мы либо вообще игнорируем некоторую степень, либо берем ее однократно, либо с коэффициентом «2».

Перевод этого наблюдения на язык весов и гирь означает: уравновешивая целочисленный груз с помощью троичной системы гирь, мы поступаем следующим образом. Груз ставим на правое (короткое) плечо, а необходимые гири из имеющегося троичного

набора ставим на левое плечо – либо на крайнюю чашу, либо на чашу, расположенную посередине плеча.

Таким образом, имея в своем распоряжении гири, принадлежащие начальному отрезку ряда троичных гирь:

1 г, 3 г, 9 г, 27 г, …, 3^n г,

Мы можем уравновесить любой груз, числовое значение веса которого не превосходит величины:

$$2\cdot(1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n) = 2\cdot(3^{n+1} - 1)/(3 - 1) = 3^{n+1} - 1.$$

Обычные весы, при использовании того же троичного набора гирь, позволяют уравновесить грузы, у которых числовое значение веса не превосходит $(3^{n+1} - 1)/2$, т.е. вдвое меньшей величины.

Замечание. Аналогичным образом можно для любого натурального p, $p > 1$, устроить p-ичные чашечные супер-весы, идеально приспособленные для $(p+1)$-ичной системы гирь.

У таких супер-весов одно плечо в p раз длиннее другого и разделено на p равных частей, а в точках разделения прикреплены соответствующие чаши. Таким образом, у этих супер-весов всего $p+1$ чаша. Имея р-ичные супер-весы и q-ичные супер-весы, а также $(p+1)$-ичную и $(q+1)$-ичную системы гирь, можно с помощью несложного алгоритма переводить $(p+1)$-ичную запись натурального числа непосред-

ственно в (q+1)-ичную, не используя десятичную систему на промежуточном этапе.

Замечание. Для того, чтобы осуществить перевод (p+1)-ичной записи натурального числа непосредственно в (q+1)-ичную, не используя десятичную систему на промежуточном этапе, можно обойтись одними чашечными супер-весами, устроенными следующим образом. Отношение L_1/L_2 длины левого плеча к длине правого должно равняться p/q, левое плечо должно быть разделено на p равных промежутков, а правое – на q точно таких же промежутков. Чаши весов должны быть размещены во всех промежуточных точках деления каждого плеча, а также по внешним краям этих плеч. Таким образом, всего должно быть размещено $p+q$ чаш. Кроме того, требуются два набора гирь: (p+1)-ичный набор и (q+1)-ичный набор. (Очевидно, значения веса гирь в обоих наборах должны быть вычислены в одной и той же системе мер – например, в граммах или в килограммах.) Пусть теперь нам задано некоторое натуральное число в (p+1)-системе. Набираем это число с помощью гирь из (p+1)-ичного набора, расставляя их по соответствующим чашам на левом плече. Затем уравновешиваем весы расставляя гири из (q+1)-ичного набора по чашам на правом плече. В результате, очевидно, получим запись исходного натурального числа в (q+1)-ичной системе счисления.

Алгоритм расстановки гирь на правом плече (т.е. на этапе уравновешивания весов) несложен и напоминает алгоритм составления заданного натурального числа из степеней двойки (см. Добавление 1).

Наибольший учебный интерес, на взгляд автора, представляет непосредственный переход от троичной записи к двоичной (и, наоборот, переход от двоичной записи – к троичной). Для этой цели, как следует из сказанного выше, нам потребуются «двоичные» чашечные супер-весы (см. рис. 36), а также троичный и двоичный наборы гирь. Приведем простейший пример. Пусть задано в троичной записи число: $21_{(3)}$. Расставляем соответствующие гири на левых чашах (см. рис. 37), а затем уравновешиваем весы, последовательно ставя на правую чашу гири из двоичного набора: $100_{(2)}$ $10_{(2)}$, $1_{(2)}$.

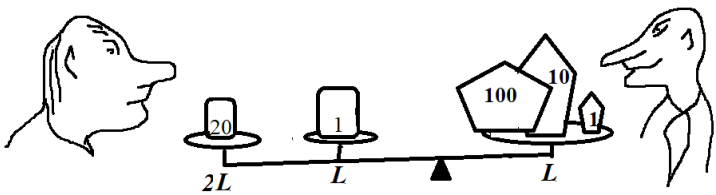


Рис. 37

В итоге получаем искомую двоичную запись предложенного числа:

$21_{(3)} = 111_{(2)}$.

§11. Системы уравнений на чашечных весах

Пусть X и Y – некоторые грузы; обозначим через P(X) и P(Y) числовые значения их веса. Нас будет интересовать реализация на «двоичных» чашечных супер-весах системы из двух уравнений относительно P(X), P(Y). Рассмотрим в качестве примера простую ситуацию, когда используется перекидывание груза через блок; см. рис. 38. «Соль» задачи не столько в том, чтобы составить и решить получающуюся систему уравнений,

$$2P(X) – (P(Y) + P_1) = P(X).$$

$$2P(X) + P(Y) = P_2 ,$$

сколько в проверке найденного решения

$$P(X) = (P_1 + P_2)/3,$$

$$P(Y) = (P_2 - 2P_1)/3$$

при помощи взвешивания грузов X и Y на стандартных весах со стрелкой.

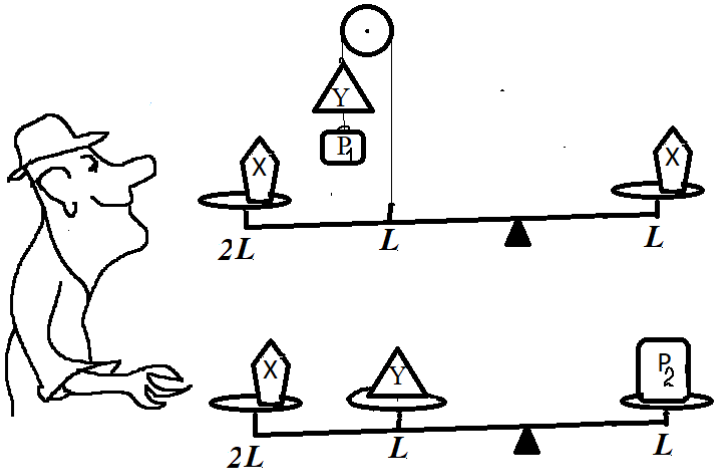


Рис. 38

Будет ли это интересно детям? Ответ автору неизвестен.

§12. Игра «супер-весы» (версия игры «камешки»)

Рассмотрим супер-весы, у которых левое плечо в четыре раза длиннее правого, и сформулируем правила следующей игры (представляющей собой версию известной игры «камешки»; см., например, [7]).

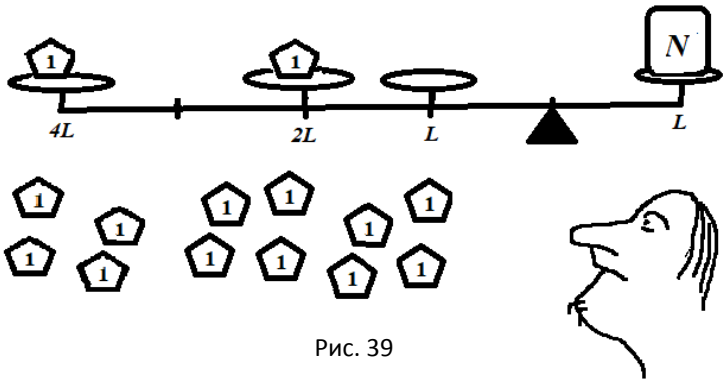


Рис. 39

Игра «супер-весы». *На правой чаше весов (расположенной на коротком плече) стоит гиря весом N г. Играют двое; они по очереди ставят по одной гире весом в 1 г на одну из левых чаш (см. рис. 39).*

Выигрывает тот, кто уравновесит весы.

Если в результате хода одного из игроков левое плечо весов опустится ниже правого (минуя тем самым положение равновесия), то этот игрок считается проигравшим, а выигравшим объявляется его партнер.

Заметим, что у этой версии игры есть два преимущества перед классической версией.

1. В процессе игры демонстрируется действие физических законов.

2. Знание выигрышной стратегии легче скрыть от соперника, и игра может (на взгляд автора) в течение более длительного времени вызывать интерес у детей.

Замечание. Условия игры «супер-весы» могут формулироваться и несколько по-другому. Будем считать, что каждому из участников дается по [N/2] одногра́ммовых гирь (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Тогда появляется возможность определить величину выигрыша (достающегося тому, кто уравновесил весы) – как число оставшихся у победителя неиспользованных гирь.

Классическая версия игры «камешки». *Имеется куча, в которой N камней. Двое по очереди берут из этой кучи 1, 2 или 4 камня. Выигрывает тот, кто берет последний камень.*

Решение. В случае, когда N делится на 3, при правильной игре выигрывает не Первый игрок (Начинающий), а Второй игрок (Продолжающий). Он каждый раз должен дополнять число камней, взятых Первым, до числа, делящегося на 3.

В случае, когда N не делится на 3, при правильной игре выигрывает Первый. Вначале он должен взять из кучи 1 или 2 камня, с таким расчетом, чтобы число оставшихся в куче камней делилось на 3. При последующих ходах Первый дополняет число камней, взятых Вторым, до числа, делящегося на 3.

Замечание. Конкретный вид супер-весов, используемых в игре, не обязательно должен быть таким, как на рис. 39. Фактически, для игры годятся более-менее любые супер-весы. Например, такие, как на рис. 40 или 41. Читателю предлагается самостоятельно определить в случае таких супер-весов соответствующую выигрышную стратегию, зависящую от N.

Указание. Если в игре используются супер-весы, изображенные на рис. 40, то в случае, когда N делится нацело на 5, выигрышная стратегия имеется у Второго игрока, а в случае, когда N не делится нацело на 5, – у Первого.

Если же в игре используются супер-весы, изображенные на рис. 41, то в случае, когда N делится нацело на 3, выигрышная стратегия имеется у Второго игрока, а в случае, когда N не делится нацело на 3, – у Первого.

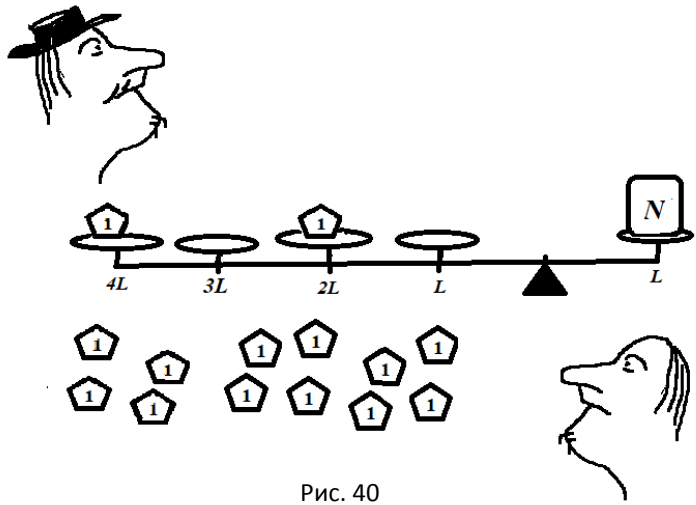


Рис. 40

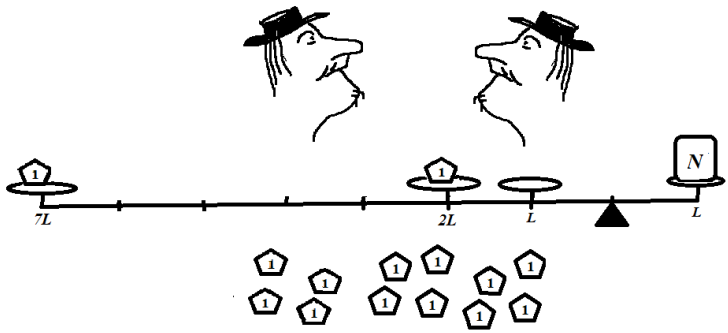


Рис. 41

Добавление 1.
Кое-что о двоичной системе [5]

1. Алгоритм перевода числа из десятичной записи в p-ичную хорошо известен. Пусть, например, требуется записать в семеричной системе десятичное число $a = 108$. Сначала делим 108 с остатком на 7 и получаем:

$$108 = 15\times7 + 3. \qquad (Д.1)$$

Здесь остаток от деления, т.е. число 3, – это и есть последняя (младшая) цифра в записи нашего числа a в семеричной системе. Теперь возьмем в предыдущей формуле неполное частное 15 и снова применим деление на 7 с остатком. Имеем:

$$15 = 2\times7 + 1.$$

Подставляя это выражение в (Д.1), получаем:

$$108 = (2\times7 + 1)\times7 + 3,$$

откуда

$$108 = 2\times7^2 + 1\times7 + 3.$$

В результате семеричная запись нашего числа имеет вид $213_{(7)}$, т.е.

$$108 = 213_{(7)}. \qquad (Д.2)$$

Итак, упомянутый алгоритм несложен и, казалось бы, не может быть упрощен или улучшен. Подчеркнем, что в этом алгоритме цифры *p*-ичной записи появляются по очереди, начиная от самого младшего разряда (разряда единиц) и заканчивая цифрой самого старшего разряда. Иными словами, *p*-ичная запись числа *a* постепенно пишется *справа налево.* Существует, однако, совершенно иной способ, при котором *p*-ичная запись постепенно пишется *слева направо.*

2. Лучше всего преимущества этого второго способа удается продемонстрировать при переходе от десятичной записи к двоичной. Дело в том, что в двоичной системе кроме нуля (а нуль – это, в сущности, не столько цифра, сколько значок пропуска разряда) имеется только одна цифра – единица. Попробуем записать теперь число 108 в двоичной системе. Конечно, можно было бы воспользоваться тем же алгоритмом, что и в. п. 1, но это было бы нерационально.

Вместо этого мы поступим следующим образом. Начнем выписывать последовательные степени двойки:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. (Д.3)

(Здесь мы остановились, так как следующая степень двойки, 128, уже больше, чем наше число $a = 108$.)

Теперь станем последовательно «набирать» 108 из степеней (Д.3), начиная со старших степеней и двигаясь в сторону младших.

Имеем:

$64 < 108$,

$64 + 32 = 96 < 108$,

$64 + 32 + 16$ – больше, чем 108, поэтому берем из ряда степеней (Д.3) в качестве следующего слагаемого 8 (вместо 16):

$64 + 32 + 8 = 104 < 108$,

$64 + 32 + 8 + 4 = 108.$ (Д.4)

Итак, цель достигнута. Поскольку

$64 = 2^6,\ 32 = 2^5,\ 8 = 2^3,\ 4 = 2^2,$

из (Д.4) получаем искомую двоичную запись числа 108:

$108 = 1101100_{(2)}.$ (Д.5)

3. Утверждение. *Описанный в п. 2 прием всегда срабатывает при переходе от десятичной записи к двоичной.*

Это утверждение вовсе не очевидно и требует специального доказательства. Проведем его методом математической индукции.

Доказательство.

База индукции. Пусть $a = 1$. В этом случае сделанное утверждение очевидно.

Предположение индукции. Выберем произвольное фиксированное M и предположим, что сделанное утверждение верно для всех натуральных a, не превосходящих M.

Шаг индукции. Докажем, опираясь на предположение индукции, что тогда наше утверждение верно при $a = M + 1$.

Пусть d – наивысшая степень двойки такая, что

$$2^d \le M + 1; \qquad (Д.6)$$

таким образом,

$$2^{d+1} > M + 1. \qquad (Д.7)$$

Рассмотрим разность

$$Q = (M + 1) - 2^d$$

(не ограничивая общности, мы всегда можем считать, что $Q > 0$). Очевидно, что

$$Q < M + 1, \qquad (Д.8)$$

поэтому в силу предположения индукции натуральное число Q может быть представлено в виде суммы степеней двойки именно при помощи алгоритма, рассмотренного выше в п. 2. Однако этого еще недостаточно для наших целей. Необходимо показать, что в двоичное разложение числа Q могут входить только степени

двойки с показателями строго меньшими, чем d. Прежде всего, степени двойки с показателями > d в разложение для Q не могут входить в силу (Д.7) и (Д.8).

Далее, покажем, что 2^d также не может входить в упомянутое разложение. Действительно, предположим противное, а именно, что

$$Q = 2^d + \ldots,$$

т.е.

$$(M + 1) - 2^d = 2^d + \ldots,$$

откуда

$$M + 1 = 2 \times 2^d + \ldots,$$

что, очевидно, противоречит условию (Д.7). Тем самым наше утверждение доказано.

Добавление 2.
«Перенесение с противоположным знаком» гири на другую чашу равноплечих весов

Пусть G – гиря, стоящая, например, на левой чаше уравновешенных равноплечих весов (на этой чаше может стоять еще какой-то груз). Снимем теперь гирю G с левой чаши, возьмем *такую же точно* гирю, привяжем ее с помощью нити к грузу, стоящему на правой чаше, и перекинем ее через блок, расположенный

над правой чашей. В таком «перекинутом через блок» положении будем обозначать эту гирю через –G («минус» G). Как обосновать тот факт, что, убирая гирю G с левой чаши и помещая «отрицательную гирю» –G над правой чашей, мы сохраняем равновесие равноплечих весов?

Подчеркнем, что речь идет об обосновании на физическом уровне строгости (или, если угодно, на уровне здравого смысла). То, что такое обоснование необходимо, а сам факт неочевиден, выяснилось в разговоре с читателями предыдущего издания этой книжки.

Обоснование состоит в следующем. Итак, на левой чаше весов стоит гиря G и еще какой-то груз, на правой чаше – тоже некоторый груз (см. рис. 42). Весы находятся в равновесии. Равновесие сохранится, если к обеим чашам приложить одинаковые силы, направленные вверх. Это можно сделать с помощью двух одинаковых гирь –G, помещенных над левой и правой чашами. Левую гирю –G привяжем к гире G, а правую гирю –G – к грузу, стоящему на правой чаше. *Очевидно*, что обе гири G и –G можно убрать с левой чаши, не нарушив равновесия, поскольку, будучи связаны друг с другом, они не оказывают никакого давления на чашу. На этом обоснование заканчивается.

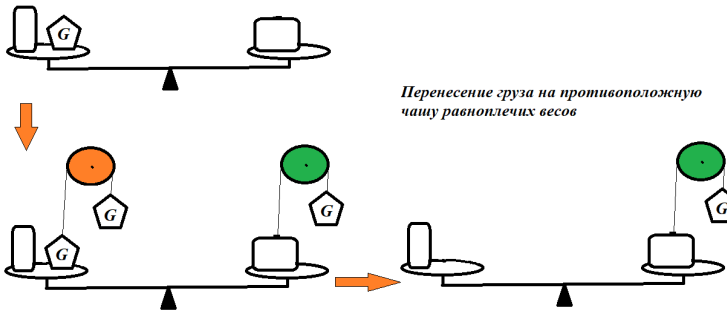


Рис. 42

Добавление 3.
К вопросу об определении отношения длин плеч неравноплечих весов

В §6 мы уже определяли отношение длин плеч неравноплечих весов, причем для этого нам приходлось производить два взвешивания. Оказывается, что можно обойтись одним взвешиванием в системе, представляющей собой комбинацию двух одинаковых весов, связанных между собой при помощи блока (см. рис. 43). Числовые значения веса гирь P_1 и P_2 считаем известными.

Нетрудно понять, что условие равновесия системы, изображенной на рис.43, имеет вид:

$P_2(L_2 / L_1)L_2 = P_1L_1$,

откуда вновь получаем соотношение, встретившееся нам в §6:

$$L_1/L_2 = (P_2/P_1)^{1/2}. \qquad (*)$$

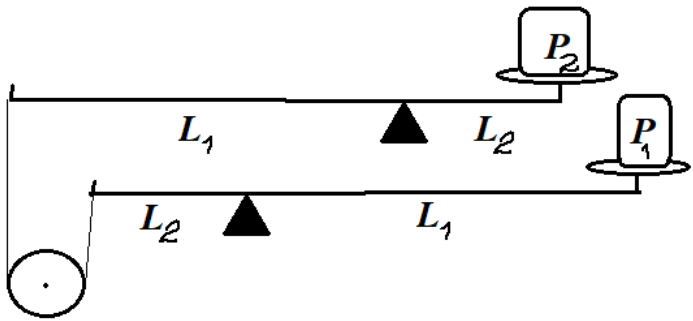


Рис. 43

Добавление 4.
Лаборатория чашечных весов.
Возможные типы задач

Если кому-нибудь придет в голову создать лабораторию чашечных весов, то вот типы физико-математических задач, которыми можно было бы там заниматься.

1. Экспериментальное подтверждение арифметических законов для операций сложения, вычитания, умножения и деления.

2. Составление уравнений, исходя из равновесия весов, на которых размещены гири и груз неизвестного веса. Случаи равноплечих и неравноплечих весов.

3. Размещение грузов и гирь на весах в соответствии с заданным уравнением.

4. Подбор минимального количества гирь, с помощью которых можно уравновесить на неравноплечих весах несколько грузов известного веса.

5. Размещение на весах нескольких грузов известного веса таким образом, чтобы было достигнуто равновесие. Случаи равноплечих и неравноплечих весов.

6. Нахождение фальшивой монеты, вес которой отличается от веса настоящих монет. Случаи равноплечих и неравноплечих весов.

7. Взвешивание груза на неравноплечих весах при помощи «двоичной» системы гирь. Нахождение алгоритма такого взвешивания.

8. Вычисление среднего геометрического двух чисел при помощи неравноплечих весов и весов со стрелкой.

9. Экспериментальное подтверждение неравенства между средним геометрическим двух чисел и их средним арифметическим при помощи чашечных весов (равноплечих и неравноплечих).

10. Экспериментальное сравнение возможностей обычных и «двоичных» чашечных весов при использовании различных наборов гирь.

11 Троичная система гирь, ее возможности в случае равноплечих весов (задача Баше).

12. «Двоичные» чашечные супер-весы и троичная система гирь.

13. Перевод p-ичной записи в q-ичную при помощи соответствующих супер-весов и систем гирь. Квадратные уравнения на чашечных супер-весах.

14. Игра «супер-весы» (в различных версиях).

Нужна ли такая лаборатория? Ответ на этот вопрос зависит от того, существует ли у школьников объективная потребность в обнаружении связи математических формул с результатами предметных действий.

Ответы

К задаче 22: 2(11+5+5) = 3(6+5+3)

К задаче 23: 3(1+6) = 12+6+3

К задаче 24: 2(4+2+2+1) = 10+8

К задаче 25: 7(3+6+9) = 3(7+14+21)

К задаче 26: 3(7+[6+8]+21) = 7(3+[2+4]+9)

К задаче 27: 2(8/7 + 37/7 + 123/7) = 48; 3(1+6+9) = 48

К задаче 28: гири с численными значениями веса 1; 1; 2

К задаче 29: гири с численными значениями веса 1; 1; 2

Литература

1. Локшин А.А., Бахтина О.В., Сагомонян Е.А. Арифметика на чашечных весах. Изд. 2. – М.: МАКС Пресс, 2023. – 36 с.

2. Локшин А.А. Делимость и гири на чашечных весах / Тенденции развития науки и образования, 2023, № 96, вып. 8, с. 145–148.

3. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – 5-е изд. – М.: МЦНМО, 2016. – 104 с.

4. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. – М.: МЦНМО, 2004. – 165 с.

5. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. Изд. 3. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 124 с.

6. Локшин А.А. О «двоичных» чашечных весах и их преимуществе перед обычными (в печати).

7. Локшин А.А., Иванова Е.А. «Камешки» и другие математические игры. – М.: МАКС Пресс, 2022. – 60 с.

Alexander A. Lokshin

Arithmetic problems on pan scales: manual. – Ed.3, rev. add. – Moscow: MAKS Press, 2023. – 76 p.: ill.

ISBN 978-5-317-06987-2

https://doi.org/10.29003/m3440.978-5-317-06987-2

The manual consists mainly of arithmetic problems formulated in the form of elementary physical experiments with pan balances. Addressed to school teachers, students of pedagogical universities and parents of school-children.

Keywords: laws of arithmetic, equal-arm scales, unequal-arm balance, Archimedes' law, suspension block as a means of creating a “negative weight”.

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Учебное пособие

3-е издание, исправленное и дополненное

В издании использованы рисунки А.А. Локшина

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс».
Главный редактор: *Е.М. Бугачева.*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова.*
Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 19.05.2023 г.
Формат 84x108 1/32. Усл. печ. л. 3,99. Тираж 25 экз. Заказ 071.

Издательство ООО «МАКС Пресс».
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н